FSC 5113, Física III
LISTA 5

Paweł Klimas
Universidade Federal de Santa Catarina, Trindade, 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil
(Dated: May 17, 2019)

1. Calcule a força por unidade do comprimento entre dois fios paralelos que conduzem as correntes I_1 e I_2. A distancia entre os fios tem valor a.
Resposta: $\vec{f} = -\frac{\mu_0}{2\pi a} I_1 I_2 \hat{\rho}$ onde $\hat{\rho}$ representa um versor radial em coordenasdas cilíndricas.

2. Considere um fio reto e muto longo que coresponde com eixo z. Uma corrente, cuja intensidade tem valor I_1, flui neste fio em direção positiva do eixo z, veja Fig1. Num dos planos $\phi = const$ (sendo ϕ a coordenada cilíndrica) encontra-se uma espira com a corrente I_2. Os lados da espira tem comprimentos b e c e a distancia entre o lado mais proximo ao fio e o fio tem valor a. Calcule as forças que atuam sobre percursos C_1, C_2, C_3 e C_4 da espira. Verifique que a força total não é nula.

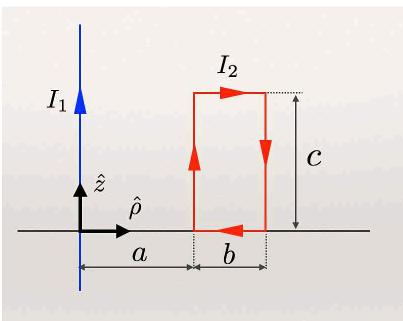


Figure 1.

3. Uma espira da Fig2. encontra-se num campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$. Os raios interno e externo da espira tem valores a e b respectivamente. Os lados de $\phi = const$ da espira são separados por ângulo α. Calcule momento magnêtico de espira e o torque no campo magnêtico.

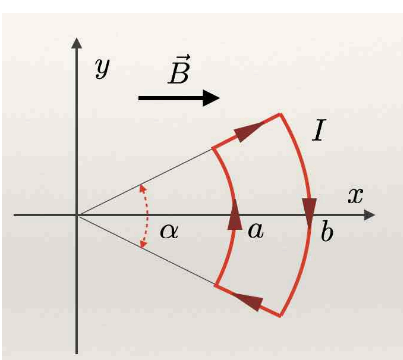


Figure 2.

4. Campo magnético de um fio reto, infinito com a corrente I tem a forma em coordenadas cilíndricas $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{\rho}\hat{\phi}$ onde $\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$. Expresse esta formula em coordenadas Cartesianas. Mostre que quando o fio encontra-se em ponto (x', y') a formula para o campo tem a forma seguinte

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[-\frac{(y-y')\hat{x}}{(x-x')^2+(y-y')^2} + \frac{(x-x')\hat{y}}{(x-x')^2+(y-y')^2}\right].$$

5. Considere uma densidade de corrente superficial $\vec{K} = K\hat{z}$ fluindo no plano $x = 0$. Calcule o campo magnético gerado por esta corrente nos regiões $x < 0$ e $x > 0$. A solução pode ser encontrada dividindo o plano em faixas infinitesimais dy'. Em cada destas faixas flui a corrente $dI = K\,dy'$. As faixas são posicionadas em $(x' = 0, y')$. Utilize o resultado de Problema 4 para encontrar o campo $\vec{B}$.
Resposta: $\vec{B} = \frac{\mu_0 K}{2}\,\mathrm{sgn}(x)\,\hat{y}$.

6. O campo magnético no eixo z gerado por uma espira circular de raio a com o centro em z' tem valor

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\hat{z}\frac{a^2}{[a^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Aplique este resultado para calcular o campo magnético no eixo de um cilíndro de raio a e comprimento L que possui na sua superfície uma corrente $\vec{K} = K\hat{\phi}$. Divida o cilindro em faixas de altura infinitesima dz', veja Fig3. A corrente que flui em cada faixa tem valor $dI = K dz'$. Substituindo $\vec{B} \to d\vec{B}$ e $I \to dI$ na formula acima calcule o campo total no eixo z integrando em z' de $-L/2$ até $L/2$.

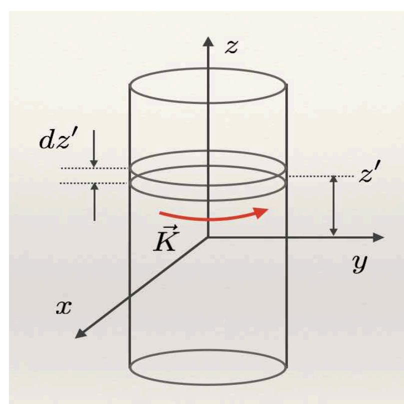


Figure 3.

Resposta:

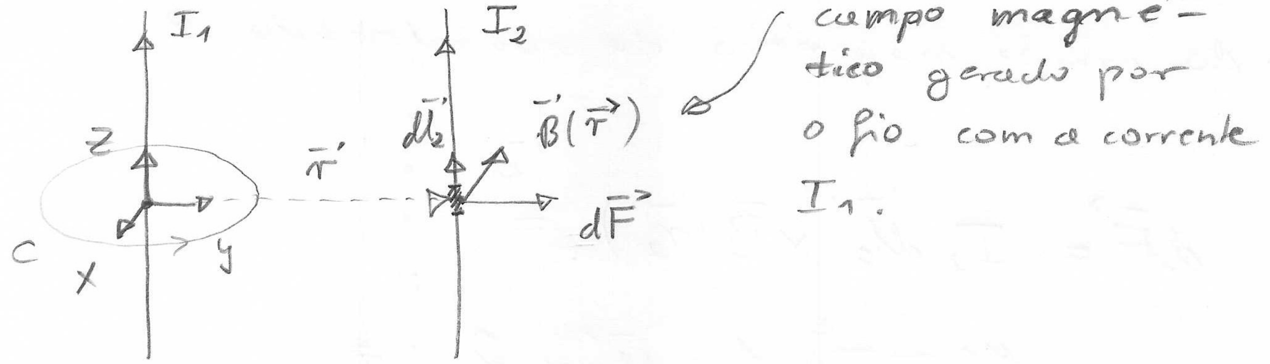
$$\vec{B} = \hat{z}\frac{\mu_0 K}{2}\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+(z+\frac{L}{2})^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+(z-\frac{L}{2})^2}}\right]$$

Calcule Limite desta expressão para $L \to \infty$. Mostre que para $K = \frac{N}{L}I = nI$ o resultado representa campo no interior de um solenoide de comprimento infinito.

7. Duas espiras circulares de raio a cada encontram-se em distancia L. Os planos que contem as espiras são mutualmente paralelos e perpendiculares ao eixo z que passa por centro de espiras. As correntes em ambas as espiras tem a mesma intensidade I e fluem no mesmo sentido. Calcule campo magnético $\vec{B}$ no eixo z. Calcule $\frac{d\vec{B}}{dz}|_{z=0}$ e $\frac{d^2\vec{B}}{dz^2}|_{z=0}$. Encontre L tal que $\frac{d^2\vec{B}}{dz^2}|_{z=0} = 0$.
8. Considere dois cilindros condutores concêntricos (com eixo z em comum), muito longos e finos. Na superficie de cilindro interno de raio a flui a corrente I_1 e na superficie de cilindro externo de raio b flui a corrente I_2. Aplicando a lei de Ampere obtenha o campo magnético em regiões $\rho < a$, $a < \rho < b$ e $\rho > b$.
9. Considere um cilindro oco e muito longo de raio interno $\rho = a$ e raio externo $\rho = b$. no interior de cilindro $a < \rho < b$ flui a corrente de densidade $\vec{J} = J\hat{z}$. Aplicando a lei de Ampere obtenha o campo magnético em regiões $\rho < a$, $a < \rho < b$ e $\rho > b$.
10. Considere um cilindro muito longo de raio $\rho = b$. No interior deste cilindro encontra-se um outro (concêntrico com o cilindro maior) de raio $\rho = a < b$. A densidade de corrente $\vec{J}$ que flui no cilindro central tem valor $\vec{J} = J_1\hat{z}$. Em região $a < \rho < b$ flui a corrente cuja densidade tem valor $\vec{J} = J_2\hat{z}$. Aplicando a lei de Ampere obtenha o campo magnético em regiões $\rho < a$, $a < \rho < b$ e $\rho > b$.

LISTA 5

Questão 1



→ consideremos coordenadas na origem localizada no fio I_1 com $\hat{z}$ paralelo a este fio.

→ Em coordenadas cilíndricas

$\bar{B}' = B(\rho)\,\hat{\phi}$ → Ansatz.

$d\vec{l}' = \hat{\phi}\,\rho\, d\phi$ → Amperiana (círculo)

Aplicando a Lei de Ampère:

$$\oint_C \bar{B}' \cdot d\bar{l}' = \mu_0 I_1 \Rightarrow 2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 I_1$$

$$\boxed{\bar{B}' = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{\rho}\,\hat{\phi}}$$

→ o segundo fio encontra-se em distância $\rho = d$

→ um trecho de fio com a corrente I_2 é sujeito a força

$$d\bar{F}_{21}' = (I_2 d\bar{l}_2') \times \bar{B}_1'(\vec{r}_2)$$

vetor no fio 2

2

O vetor $\vec{r_2}$ pode ser escolhido como $\vec{r_2}' = \hat{\rho}\, d$. Isto é possível porque os fios são infinitos, o que causa independência do campo magnético da coordenada z.

$$d\vec{F}' = I_2\, d\vec{l}_2' \times \vec{B}'(\vec{r_2}') =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \frac{1}{d}\, d\vec{l}_2' \times \hat{\phi} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi d} I_1 I_2 \left(dz\, \hat{z}\right) \times \hat{\phi} = \left\{ \hat{z} \times \hat{\phi} = -\hat{\rho} \right\}$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}\, \hat{\rho}\, dz$$

A forsa por elemento de comprimento

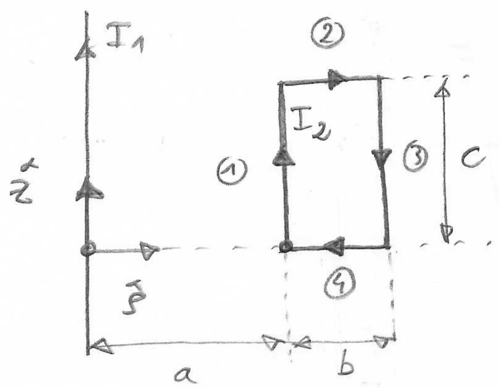
$$\boxed{\vec{f}' = \frac{d\vec{F}'}{dz} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d}\, \hat{\rho}}$$

→ Forsa exercida sobre unidade de fio 2 gerada por interasão deste fio com o fio 1.

→ atrativa $I_1 I_2 > 0$

→ repulsiva $I_1 I_2 < 0$

Questão 2



$\phi = \text{const}$

→ calcular a força total entre o fio e a espira.

→ campo do fio 1 $\quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \frac{\hat{\phi}}{\rho}$

→ Força infinitesimal sobre elemento de espira

$$d\vec{F}' = I_2 \, d\vec{l}' \times \vec{B}(\vec{r}') \qquad d\vec{l}' \equiv d\vec{r}'$$

→ Força total $\qquad C_1, C_3 \quad d\vec{l}' = \hat{z}\, dz$

$$\vec{F}' = I_2 \oint_C d\vec{l}' \times \vec{B}(\vec{r}') \qquad C_2, C_4 \quad d\vec{l}' = \hat{\rho}\, d\rho$$

$$\vec{F}' = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \left[\int_0^c dz \, \frac{\hat{z} \times \hat{\phi}}{a} + \int_a^{a+b} d\rho \, \frac{\hat{\rho} \times \hat{\phi}}{\rho} + \int_c^0 dz \, \frac{\hat{z} \times \hat{\phi}}{a+b} + \int_{a+b}^{a} d\rho \, \frac{\hat{\rho} \times \hat{\phi}}{\rho} \right] = \ldots$$

$$\vec{F}_1' = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 (-\hat{\rho}) \frac{c}{a}$$

$$\vec{F}_4' = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 (-\hat{\rho}) \frac{(-c)}{a+b}$$

$$\vec{F}_2' = -\vec{F}_4' = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \int_a^{a+b} d\rho \, \frac{\hat{\rho} \times \hat{\phi}}{\rho} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \, \hat{z} \ln \frac{a+b}{a} =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \, \hat{z} \ln\left[1 + \frac{b}{a} \right]$$

Força total:

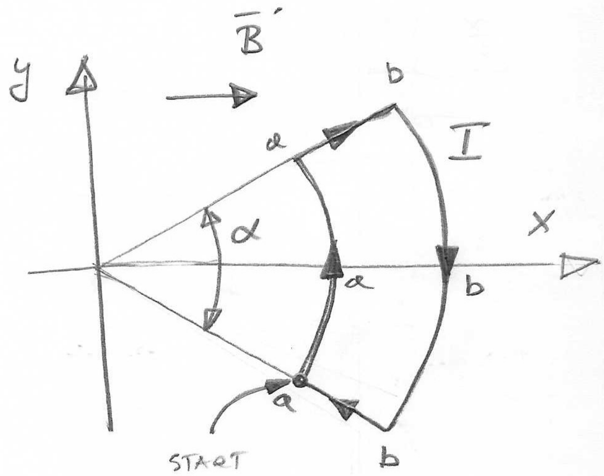
$$\vec{F}' = \vec{F}_1' + \cancel{\vec{F}_2'} + \vec{F}_3' + \cancel{\vec{F}_4'} =$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \, \hat{\rho} \, c \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \, \hat{\rho} \, c \left[\frac{a+b-a}{a(a+b)} \right] =$$

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 \, \frac{bc}{a(a+b)} \, \hat{\rho}$$

Questão 3



campo magnético uniforme

$\bar{B}' = B\hat{x}$

$\phi = $ const.

A espira interage com o campo magnético externo através do seu próprio momento.

→ A espira forma uma curva fechada, portanto

$$\bar{F}' = I\oint_C d\bar{l}' \times \bar{B}' \overset{\text{uniforme}}{=} I\underbrace{\left(\oint d\bar{l}'\right)}_{0} \times \bar{B}' = 0$$

→ Torque

$$\bar{\tau}' = \oint_C \bar{r}' \times d\bar{F}' \overset{\text{aula}}{=} \bar{m}' \times \bar{B}'$$

$\bar{m}'$ → momento magnético da espira

$$\bar{m}' = I\,\bar{S}' = I\,\frac{1}{2}\oint_C \bar{r}' \times d\bar{r}' =$$

$$= \frac{I}{2}\left[\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} (a\hat{\rho}) \times (\hat{\phi}\, a\, d\phi) + \underbrace{\int_a^b (\hat{\rho}\,\rho) \times (\hat{\rho}\, d\rho)}_{0} + \right.$$

$$\left. + \int_{\frac{\alpha}{2}}^{-\frac{\alpha}{2}} (b\hat{\rho}) \times (\hat{\phi}\, b\, d\phi) + \underbrace{\int_b^a (\hat{\rho}\,\rho) \times (\hat{\rho}\, d\rho)}_{0}\right]$$

6)

$$= \frac{I}{2} \underbrace{\hat{\varsigma} \times \hat{\phi}}_{\hat{z}} \left[a^2 \underbrace{\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} d\phi}_{\alpha} + b^2 \underbrace{\int_{\frac{\alpha}{2}}^{-\frac{\alpha}{2}} d\phi}_{-\alpha} \right] =$$

$$= -\frac{I}{2} \alpha (b^2 - a^2) \hat{z}$$

$$\bar{B}' = B \hat{x}$$

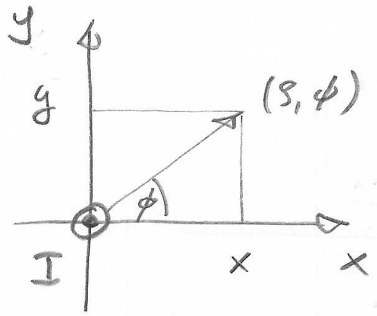
Torque

$$\bar{\tau}' = \bar{m}' \times \bar{B}' = -\frac{I}{2} \alpha (b^2 - a^2) B \underbrace{\hat{z} \times \hat{x}}_{\hat{y}}$$

$$\boxed{\bar{\tau}' = -\frac{I \alpha B}{2} (b^2 - a^2) \hat{y}}$$

Questão 4

Campo de fio reto infinito em coordenadas cartesianas



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\hat{\phi}}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}$$

$$= -\frac{y}{\rho}\hat{x} + \frac{x}{\rho}\hat{y} =$$

$$= \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2+y^2}}$$

→ Deslocamos o fio para a posição (x', y')

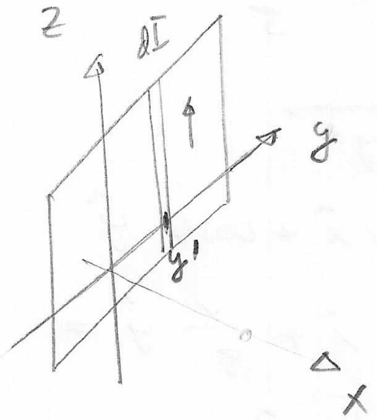
$$x \to x - x' \qquad , \; y \to y - y'$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-(y-y')\hat{x} + (x-x')\hat{y}}{(x-x')^2+(y-y')^2}}$$

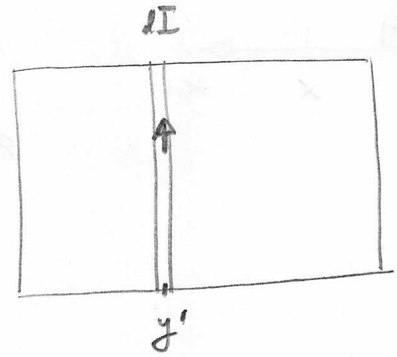
Questão 5

Consideramos a densidade da corrente

$\vec{K} = K\hat{z}$. que flui no plano



$dI = K\,dy'$



→ Decomposisão a corrente no plano em um conjunto infinito de correntes infinitesimais dI

→ Uma feixa em y' produz o campo

$$d\vec{B}' = \frac{\mu_0}{2\pi} K\,dy' \left[-\frac{y-y'}{x^2+(y-y')^2}\hat{x} + \frac{x}{x^2+(y-y')^2}\hat{y} \right]$$

→ Campo total em (x, y)

$$\vec{B}'(x,y) = \frac{\mu_0}{2\pi} K \int_{-\infty}^{+\infty} dy' \left[\cdots \right] =$$

$$= \frac{\mu_0}{2\pi} K \left[+\hat{x}\int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{y'-y}{x^2+(y'-y)^2} + \right.$$

$$\left. + \hat{y}\int_{-\infty}^{+\infty} dy' \frac{x}{x^2+(y'-y)^2} \right]$$

Integrals

1). $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y'-y}{x^2+(y'-y)^2}\,dy' = \left| \begin{array}{c} w = y'-y \\ dw = dy \\ \infty \to \infty \\ -\infty \to -\infty \end{array} \right| =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{w\,dw}{x^2+w^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{w\,dw}{x^2+w^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{w\,dw}{x^2+w^2} =$$

$u = -w$

$$= \int_{\infty}^{0} \frac{(-u)(-du)}{x^2+(-u)^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{w\,dw}{x^2+w^2} =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \frac{u\,du}{x^2+u^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{w\,dw}{x^2+w^2} = \underline{\underline{0}}$$

2). $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,dy'}{x^2+(y'-y)^2} = x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{x^2+w^2} =$$

$$= x \left[\int_{-\infty}^{0} \frac{dw}{x^2+w^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dw}{x^2+w^2} \right] =$$

$$= x \left[-\int_{\infty}^{0} \frac{du}{x^2+u^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{dw}{x^2+w^2} \right] = 2x \int_{0}^{\infty} \frac{dw}{x^2+w^2}$$

$$= 2x \int_0^\infty \frac{dw}{x^2+w^2} = \dots$$

x pode ser positivo ou negativo

$$x \equiv |x| \, \mathrm{sgn}(x)$$

$$\dots = 2x \int_0^\infty \frac{dw}{|x|^2+w^2} = 2 \frac{x}{|x|} \int_0^\infty \frac{\frac{1}{|x|}\, dw}{1+\left(\frac{w}{|x|}\right)^2}$$

Definimos $\quad w = |x| \tan u \qquad u \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$dw = |x| \frac{du}{\cos^2 u}$$

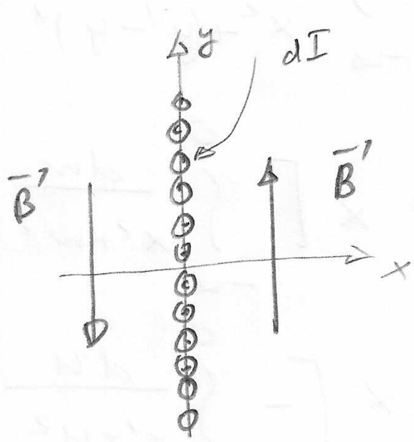
$$1+\left(\frac{w}{|x|}\right)^2 = 1+\tan^2 u = 1+\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u} = \frac{1}{\cos^2 u}$$

$$\dots = 2 \, \mathrm{sgn}\, x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cancel{|x|}} \cancel{|x|} \frac{du}{\cancel{\cos^2 u}}}{\frac{1}{\cancel{\cos^2 u}}} = 2 \, \mathrm{sgn}\, x \int_0^{\frac{\pi}{2}} du$$

$$= \pi \, \mathrm{sgn}\, x$$

$$\bar{B}' = \frac{\mu_0}{2\cancel{\pi}} K \, \hat{y} \, \cancel{\pi} \, \mathrm{sgn}(x)$$

$$\boxed{\bar{B}' = \frac{\mu_0 K}{2} \, \mathrm{sgn}(x) \, \hat{y}}$$

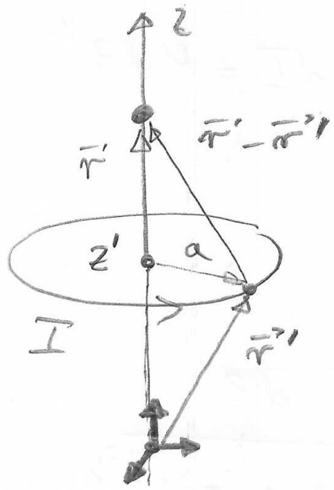


campo uniforme de
cada lado do plano

Questão 6

→ Cilindro com a corrente superficial na borda.

1). Campo de uma espira circular



$$d\bar{l}' = (a\,d\phi)\,\hat{\phi}$$

$$\bar{r}' = z\,\hat{z}$$

$$\bar{r}'' = a\,\hat{\rho} + z'\,\hat{z}$$

$$\hat{\rho} = \cos\phi\,\hat{x} + \sin\phi\,\hat{y}$$

$$\bar{R}' = \bar{r}' - \bar{r}'' = (z-z')\,\hat{z} - a\,\hat{\rho}$$

$$R^3 = \left[a^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}$$

Da formula Biot e Savart temos

$$\vec{B}(\bar{r}') = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_0 d\bar{l}' \times \frac{\vec{R}}{R^3} =$$

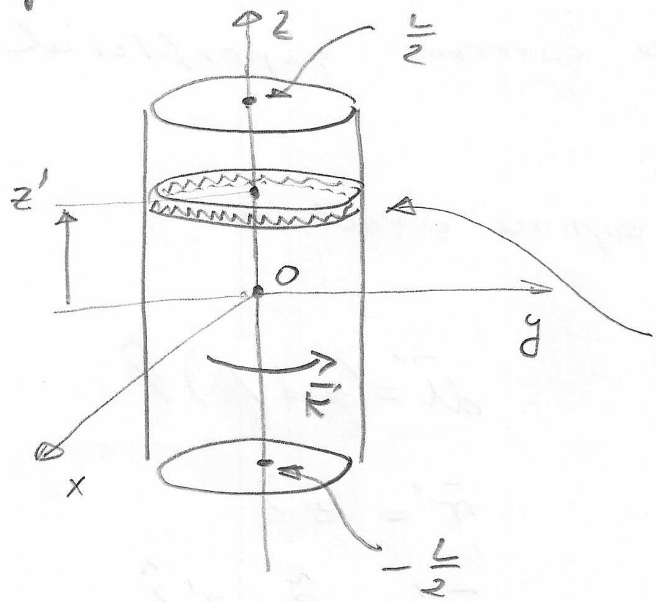
$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} a\,d\phi \, \frac{\hat{\phi} \times \left[(z-z')\,\hat{z} - a\,\hat{\rho}\right]}{R^3} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a}{R^3} \int_0^{2\pi} d\phi \left[(z-z')\,\hat{\rho}(\phi) + a\,\hat{z}\right] =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\, 2\pi\, \frac{a^2}{R^3}\,\hat{z} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2\,\hat{z}}{\left[a^2 + (z-z')^2\right]^{3/2}}$$

12)

2). Aplicamos esta formula a um cilindro



$$\bar{K} = K\hat{\phi}$$

$$dI = K\,dz'$$

$$d\bar{B}(z) = \hat{z}\,\frac{\mu_0 a^2}{2}\,\frac{K\,dz'}{\left[a^2+(z'-z)^2\right]^{3/2}}$$

$$\bar{B}(z) = \hat{z}\,\frac{\mu_0 a^2 K}{2}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}\frac{dz'}{\left[a^2+(z'-z)^2\right]^{3/2}}$$

$$w = z'-z$$

$$\bar{B}(z) = \hat{z}\,\frac{\mu_0 a^2 K}{2}\int_{z-\frac{L}{2}}^{z+\frac{L}{2}}\frac{dw}{(a^2+w^2)^{3/2}}$$

Nova variável u

$$w = a\tan u \qquad dw = a\,\frac{du}{\cos^2 u}$$

$$w^2+a^2 = a^2\left[1+\frac{w^2}{a^2}\right] = \frac{a^2}{\cos^2 u}$$

$$\bar{B}' = \hat{z}\frac{\mu_0}{2}a^2K\int_{\arctan\left(\frac{z-\frac{L}{2}}{a}\right)}^{\arctan\left(\frac{z+\frac{L}{2}}{a}\right)} \frac{a\,du}{\cos^2 u}\;\frac{\cos^3 u}{a^3} =$$

$$= \hat{z}\frac{\mu_0}{2}K\left[\sin\left(\arctan\frac{z+\frac{L}{2}}{a}\right) - \sin\left(\arctan\frac{z-\frac{L}{2}}{a}\right)\right]$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

<u>Prova</u>

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\frac{y}{x}}$$

$$\sin\theta = \sin\left(\arctan\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{x}\frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}$$

$$u \equiv \frac{y}{x}$$

$$\sin(\arctan u) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad ✓$$

$$\bar{B}' = \hat{z}\frac{\mu_0}{2}K\left[\frac{\frac{1}{a}\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{\frac{1}{a}\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{a^2}\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right]$$

$$\boxed{\bar{B}' = \hat{z}\frac{\mu_0 K}{2}\left[\frac{z+\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}}\right]}$$

Limite $L \to \infty$

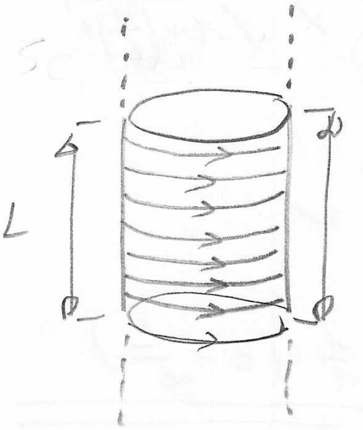
$$\lim_{L\to\infty} \frac{z \pm \frac{L}{2}}{\sqrt{a^2+\left(z\pm\frac{L}{2}\right)^2}} = \lim_{L\to\infty} \frac{\frac{L}{2}\left(\pm 1 + \frac{2z}{L}\right)}{\frac{L}{2}\sqrt{\frac{4a^2}{L^2}+\left(\frac{2z}{L}\pm 1\right)^2}} =$$

$\frac{2z}{L} \to 0$, $\frac{4a^2}{L^2} \to 0$, $\frac{2z}{L} \to 0$

$= \pm 1$

$$\bar{B}' = \hat{z}\,\frac{\mu_0 K}{2}\left[\,1+1\,\right] = \mu_0 K\,\hat{z}$$

→ Aplicação a solenoide infinito



$n \equiv \frac{N}{L}$ densidade de espiras

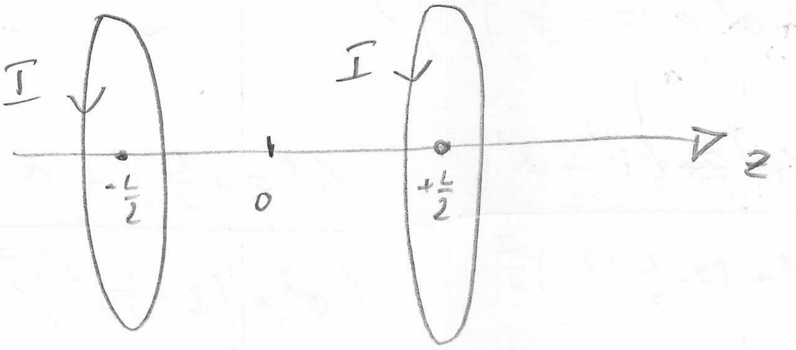
$$NI = KL$$

$$K = \frac{N}{L} I = nI$$

$$\boxed{\bar{B}' = \mu_0\, n I\, \hat{z}}$$

Questão 7

Bobinas de Helmholtz.



Campo magnético no eixo z.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2}\hat{z}\, a^2 \left[\frac{1}{\left[a^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{3/2}} \right]$$

→ Derivada

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 I}{2} a^2 \left[\frac{-\frac{3}{\cancel{2}}\cancel{2}\left(z-\frac{L}{2}\right)}{\left[a^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right]^{5/2}} + \frac{-\frac{3}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\left(z+\frac{L}{2}\right)}{\left[a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right]^{5/2}} \right]$$

$$\left.\frac{dB_z}{dz}\right|_{z=0} = \frac{\mu_0 I}{2} a^2 \left[\frac{\frac{L}{2}}{\left(a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{-\frac{L}{2}}{\left(a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right] = 0$$

→ Segunda deriva.

$$\frac{d^2B_z}{dz^2} = \frac{3}{2}\mu_0 I a^2 \left[\frac{(-)\left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right)\cdot\cancel{2}\left(z-\frac{L}{2}\right)^2}{\left(a^2+\left(z-\frac{L}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}} + \frac{(-)\left(-\frac{5}{\cancel{2}}\right)\cancel{2}\left(z+\frac{L}{2}\right)^2}{\left(a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}} \right.$$

$$\left. + \frac{-1}{\left(a^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2\right)^{5/2}} + \frac{-1}{\left(a^2+\left(z+\frac{L}{2}\right)^2\right)^{5/2}} \right]$$

16)

$$= \frac{3}{2}\mu_0 I a^2 \left[\frac{5(z-\frac{L}{2})^2 - a^2 - (z-\frac{L}{2})^2}{(a^2+(z-\frac{L}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{5(z+\frac{L}{2})^2 - a^2 - (z+\frac{L}{2})^2}{(a^2+(z-\frac{L}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{3}{2}\mu_0 I a^2 \left[\frac{4(z-\frac{L}{2})^2 - a^2}{(a^2+(z-\frac{L}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{4(z+\frac{L}{2})^2 - a^2}{(a^2+(z+\frac{L}{2})^2)^{\frac{7}{2}}} \right]$$

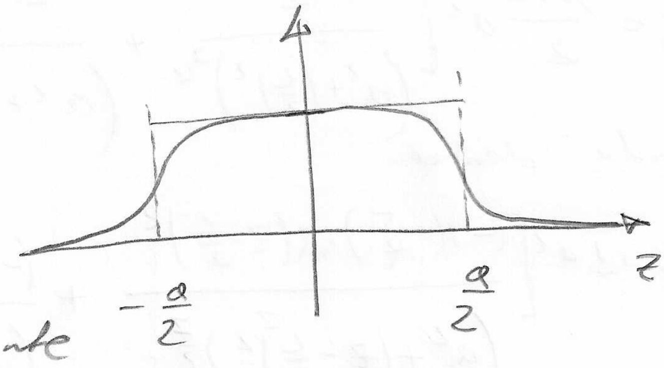
No $z=0$

$$\frac{d^2B_z}{dz} = \frac{3}{2}\mu_0 I a^2 \left[\frac{L^2-a^2}{(a^2+\frac{L^2}{4})^{\frac{7}{2}}} + \frac{L^2-a^2}{(a^2+\frac{L^2}{4})^{\frac{7}{2}}} \right] =$$

$$= 3\mu_0 I a^2 \frac{L^2-a^2}{a^2+\frac{L^2}{4}}$$

Quando $L=a$

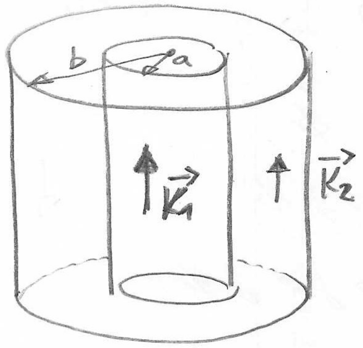
$$\frac{d^2B_z}{dz} = 0$$



Campo é bastante uniforme na região central da bobina.

Questão 8

Dois cilindros



$$\vec{K_1} = K_1 \hat{z}$$

$$\vec{K_2} = K_2 \hat{z}$$

$$I_1 = \oint_{\substack{C_1 \\ (r=a)}} \vec{K_1} \cdot \vec{dl} = 2\pi a K_1$$

$$I_2 = \oint_{\substack{C_2 \\ (r=b)}} \vec{K_2} \cdot \vec{dl} = 2\pi b K_2$$

→ Para determinar campo magnético

→ Lei de Ampère

$$\oint_C \bar{B}' \cdot \bar{dl}' = \mu_0 I_{enc}$$

$$\bar{B}' = B(\rho)\,\hat{\phi} \qquad \bar{dl}' = \hat{\phi}\,\rho\, d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} B(\rho)\,\rho\, d\phi = \mu_0 I_{enc}$$

$$2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 I_{enc} \qquad \boxed{B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho} I_{enc}}$$

→ $\rho < a$ $\quad I_{enc} = 0$

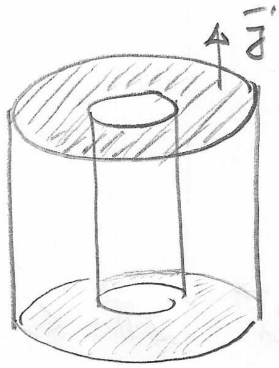
→ $a < \rho < b$ $\quad I_{enc} = I_1$

→ $\rho > b$ $\quad I_{enc} = I_1 + I_2$

$$\bar{B}' = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1}{\rho}\hat{\phi} & a < \rho < b \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi}\dfrac{I_1 + I_2}{\rho}\hat{\phi} & \rho > b \end{cases}$$

18

Questão 9



$$\vec{J}' = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ J\hat{z} & a < \rho < b \\ 0 & \rho > b \end{cases}$$

$$\vec{B}' = B(\rho)\,\hat{\phi}$$

$$d\vec{l}' = \hat{\phi}\,\rho\, d\phi$$

$$d\vec{a}' = \hat{z}\,\rho\, d\rho\, d\phi$$

→ $\rho < a$ $\quad I_{enc} = 0$

→ $a < \rho < b$ $\quad I_{enc} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^{\rho} J\rho' d\rho' = \pi J(\rho^2 - a^2)$

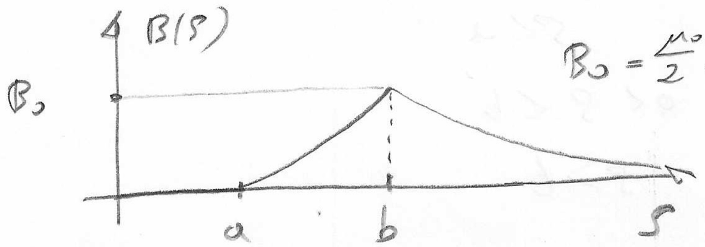
→ $\rho > b$ $\quad I_{enc} = \pi J(b^2 - a^2)$

$$\oint_C \vec{B}' \cdot d\vec{l}' = \mu_0 I_{enc}$$

$$2\pi \rho B(\rho) = \mu_0 I_{enc}$$

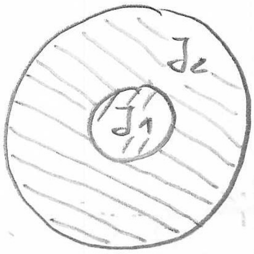
$$B(\rho) = \begin{cases} 0 \\ \frac{\mu_0}{2\pi}\pi J(\rho^2 - a^2)\frac{1}{\rho} \\ \frac{\mu_0}{2\pi}\pi J(b^2 - a^2)\frac{1}{\rho} \end{cases}$$

$$\vec{B}' = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\mu_0}{2} J(\rho^2 - a^2)\frac{\hat{\phi}}{\rho} & a < \rho < b \\ \frac{\mu_0}{2} J(b^2 - a^2)\frac{\hat{\phi}}{\rho} & \rho > b \end{cases}$$



$$B_0 = \frac{\mu_0}{2} J \frac{b^2 - a^2}{b}$$

Questão 10



$$\bar{J}' = J_1 \hat{z} \qquad \rho < a$$

$$\bar{J}' = J_2 \hat{z} \qquad a < \rho < b$$

$$\bar{J}' = 0 \qquad \rho > b$$

$$I_{enc} = \int_S \bar{J}' \cdot d\bar{a}' \qquad d\bar{a}' = \hat{z}\, \rho\, d\rho\, d\phi$$

$\rightarrow \rho < a$

$$I_{enc} = 2\pi J_1 \int_0^{\rho} \rho' d\rho' = J_1 \pi \rho^2$$

$\rightarrow a < \rho < b$

$$I_{enc} = 2\pi \left[J_1 \int_0^{a} \rho' d\rho' + J_2 \int_a^{\rho} \rho' d\rho' \right] =$$

$$= 2\pi \left[\frac{1}{2} J_1 a^2 + \frac{1}{2} J_2 (\rho^2 - a^2) \right] =$$

$$= \pi \left[J_1 a^2 + J_2 (\rho^2 - b^2) \right]$$

$\rightarrow \rho > b$

$$I_{enc} = 2\pi \left[J_1 \frac{1}{2} \pi a^2 + J_2 \frac{1}{2} \pi (b^2 - a^2) \right] =$$

$$= \pi \left[J_1 a^2 + J_2 (b^2 - a^2) \right]$$

20

Campo magnético

$$B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho} I_{enc} \quad , \quad \vec{B} = B(\rho)\,\hat{\phi}$$

$\rho < a$

$$B(\rho) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{\rho} J_1 \pi \rho^2 = \boxed{\frac{\mu_0 J_1}{2}\rho}$$

$a < \rho < b$

$$\boxed{B(\rho) = \frac{\mu_0}{2}\frac{1}{\rho}\left(J_1 a^2 + J_2(\rho^2 - a^2)\right)}$$

$\rho > b$

$$\boxed{B(\rho) = \frac{\mu_0}{2}\frac{1}{\rho}\left(J_1 a^2 + J_2(b^2 - a^2)\right)}$$