# FSC 5113, Física III
# LISTA 6

Paweł Klimas
*Universidade Federal de Santa Catarina, Trindade, 88040-900, Florianópolis, SC, Brazil*
(Dated: November 18, 2020)

1. Um anel de raio $a$ de material condutor de resistência elétrica $R$ gira com velocidade angular $\omega = const$ em torno de eixo vertical $z$, veja Fig.1. O anel encontra-se em campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{x}$ onde $B = const$.

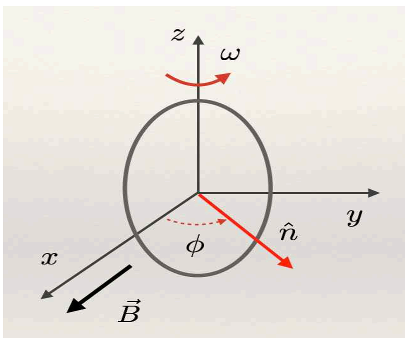



Figure 1.

Calcule:

(a) força eletromotriz induzida no anel,

(b) vetoor de momento magnético da espira em função da corrente iduzida,

(c) torque exercido pelo campo magnético sobre a espira,

(d) a potencia mecânica fornecida ao sistema para manter a velocidade $\omega$ constante,

(e) energia mecânica fornecida ao anel durante de um periodo,

(f) campo magnético no centro de anel gerado por corrente induzida $I(t)$ (considere que a corrente seja quase-estatica e utilize a lei de Biot e Savart)

(g) valor maximo de $|\vec{B}(\vec{0})|$.

2. Uma barra de metal de massa $m$, resistência $R$ e comprimento $l$ pode deslizar livremente na direção vertical mantendo contato elétrico com trilhos condutores verticais de acordo com desenho Fig.2. Os trilhos estão conectados a uma bateria com diferença potencial $V$ nas terminais. A barra fecha o circuito. Asumimos que o material de trilhos tem resistência elétrica desprezável. O sistema encontra-se no campo magnêtico uniforme perpendicular ao plano formado por trilhos e a barra. Considere que no tempo inicial a barra esta em repouso. Encontre a velocidade de barra $v(t)$ e a intensidade da corrente $I(t)$ que flui no circuito. Quais são os valores assintóticos destas quantidades para tempos grandes? Encontra a posição da barra $s(t)$ em função de tempo tomando $s(0) = 0$.

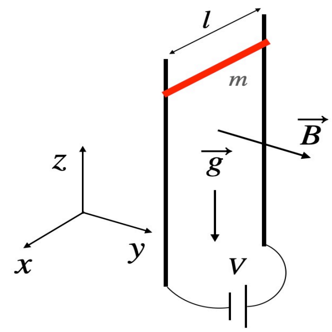



Figure 2.

3. Considere uma variação de problema anterior onde os trilhos formam angulo $\alpha > \arctan\mu$ com plano horizontal, veja Fig.3. $\mu$ representa o coeficiente de atrito cinético. Calcule velocidade $v(t)$ e a corrente $I(t)$ assumindo que notempo inicial a barra tem a velocidade $v(0) = 0$. Como mutam estas quantidades de inverter os polos da bateria? Encontre valores assintóticos de velocidade e da intensidade da corrente.

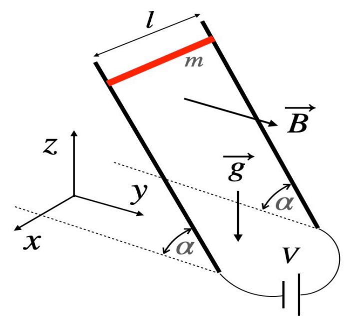



Figure 3.

4. No interior de um solenoide longo com $n$ espiras por unidade de comprimento encontram se duas pequenas esferas conectadas por uma barra rígida de comprimento $2b$, veja Fig. 4. A barra pode girar no plano $z = const$ em torno de ponto de apoio que coresponde com centro dela e com eixo do solenoide. Cada das esferas possui carga elétrica $q$ e a massa $m$. Considere uma corrente quase-estacionaria no solenoide $I(t)$ dada explicitamente. Calcule a velocidade angular $\omega(t)$ com qual o braço de alavanca gira asumindo $\omega(0) = 0$.

5. O campo elétrico gerado por uma campo magnético variável tem a forma

$$\vec{E} = \frac{\alpha(t)}{2}(-y\hat{x} + x\hat{y}).$$

Calcule a forma do campo magnético $\vec{B}$. Considere $\alpha(t) = \sin^2(\omega t)$.

6. Considere um campo elétrico produzido por uma correnete quase-estacionaria que varia num solenoide fino e longo de

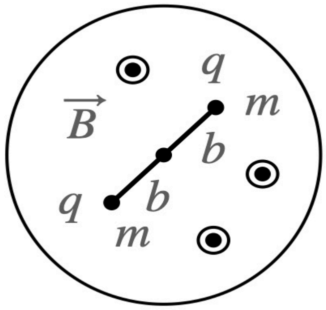


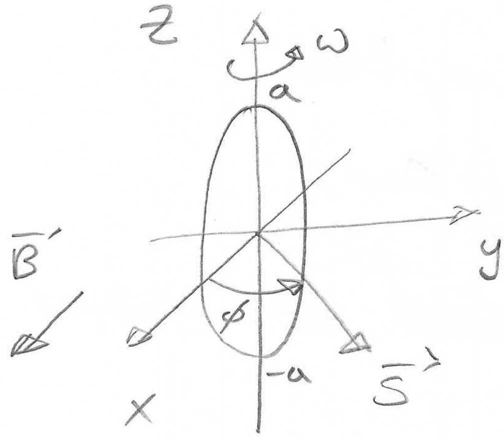

Figure 4.

raio $a$ (veja aula). Mostre que não existe nenhuma densidade de carga elétrica (isto é $\rho = 0$ em todo espaço ) associada com este campo.

# LISTA 6

## Questão 1

Anel condutor no campo magnético uniforme.




$\bar{B} = B\hat{x}$

- Anel gira em torno de eixo z com a velocidade $\omega$.
- $\phi$ – angulo entre plano do anel e a direcão do campo $\bar{B}$

- Fluxo do campo magnético

$$\Phi = \int_S \bar{B}\cdot d\bar{a} = B\int_S \hat{x}\cdot d\bar{a} = B\int \hat{x}\cdot\hat{n}(\phi)\, da$$

$$= B\pi a^2\, \hat{x}\cdot\hat{n}(\phi)$$

$$\hat{n}(\phi) \equiv \hat{\rho}(\phi) = \hat{x}\cos\phi + \hat{y}\sin\phi$$

$\phi = 0 \;\longrightarrow\; \hat{n} = \hat{x}$

$\phi = \frac{\pi}{2} \;\longrightarrow\; \hat{n} = \hat{y}$

$\phi = \omega t$

$$\boxed{\Phi = \pi a^2 B\cos(\omega t)}$$

- Força eletromotriz da indução

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = \underbrace{\pi a^2 B\omega}_{\mathcal{E}_0}\sin\omega t$$

- corrente elétrica em anel depende de resistencia $R$. Da lei de Ohm temos

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t)$$

- Momento magnético da espira

$$\vec{m} = I(t)\,\vec{S}(t) = \underbrace{I(t)\,\pi a^2}_{m(t)}\,\hat{S}(t)$$

- Torque exercido sobre anel pelo campo magnético externo

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = m(t) B (\hat{S} \times \hat{x}) =$$

$$= m B [\cos\phi\, \hat{x} + \sin\phi\, \hat{y}] \times \hat{x} =$$

$$= - m B \sin\phi\, \hat{z} =$$

$$= - \pi a^2 I(t) B \sin\phi\, \hat{z} =$$

$$= - \pi a^2 \frac{\mathcal{E}_0 B}{R} \sin^2(\omega t)\, \hat{z}$$

$$\mathcal{E}_0 = \pi a^2 \omega B \Rightarrow \boxed{\frac{\mathcal{E}_0}{\omega} = \pi a^2 B}$$

$$\boxed{\vec{\tau} = - \frac{1}{\omega} \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \sin^2(\omega t)\, \hat{z}}$$

$$\vec{\tau} = - \frac{1}{\omega} \frac{\mathcal{E}^2(t)}{R}\, \hat{z}$$

- Potencia forneida para o sistema pela fonte externa

$$P = \frac{dW}{dt} \Rightarrow dW = P\,dt$$

$$dW = \vec{\tau}'_{ext} \cdot d\vec{\phi} \qquad d\vec{\phi} \equiv \hat{z}\,d\phi$$

$\vec{\tau}'_{ext}$ ↑ torque da força externa

$\vec{\tau}'$ – torque exercido sobre a espira pelo campo magnético

O anel gira com a velocidade angular constante se

$\vec{\tau}' + \vec{\tau}'_{ext} = 0$ equilíbrio dinâmico

$$\vec{\tau}'_{ext} = -\vec{\tau}' = -\vec{m} \times \vec{B}'$$

$$dW = -\vec{\tau}' \cdot \hat{z}\,d\phi = +\frac{1}{\cancel{\omega}}\frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\sin^2(\omega t)\,\cancel{\omega}\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{\mathcal{E}_0^2}{R}\sin^2(\omega t)}_{P(t)}\,dt$$

$$\boxed{P(t) = \frac{\mathcal{E}(t)^2}{R}} \qquad \begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \mathcal{E}_0 \sin(\omega t)\\ \mathcal{E}_0 &= \pi a^2 \omega B\end{aligned}$$

4]

→ Energia para o sistema durante de um período (num giro completo de anel)

$$W = \int_0^T P(t)\, dt = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \int_0^T dt \sin^2(\omega t)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega R} \int_0^T d(\omega t) \sin^2(\omega t) \qquad \begin{array}{|l} \phi = \omega t \\ \omega T = \omega \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \end{array}$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{\omega R} \int_0^{2\pi} d\phi \sin^2\phi = \frac{\mathcal{E}_0}{\omega R} \int_0^{2\pi} d\phi\, \frac{1}{2}\left[1 - \cos 2\phi\right]$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{2\omega R}\left[2\pi - \frac{1}{2}\sin 2\phi \Big|_0^{2\pi}\right] =$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2\, \pi}{\omega R} = \frac{(\pi a^2 \omega B)^2\, \pi}{\omega R} =$$

$$= \frac{\pi^3 a^4 \omega^{\cancel{2}} B^2}{\cancel{\omega} R} = \frac{\pi^3 a^4 B^2}{R}\, \omega$$

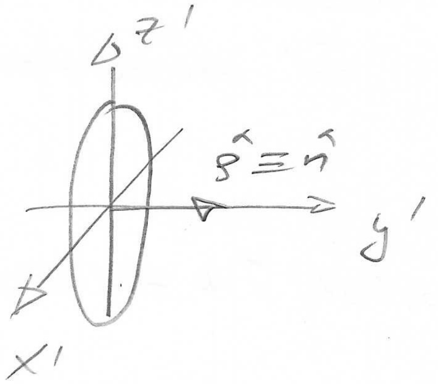
A energia fornecida para o sistema é usada para gerar campo magnético do anel e a parte dela é dissipada no anel (convertida em calor).

- Campo magnético gerado no centro do anel.

Este campo depende da corrente induzida no anel.

Sejam $x', y', z' \equiv z$ as coordenadas cartesianas no referencial do anel.

Estas coordenadas giram junto com anel.



$$\hat{y}' = \hat{\rho}$$

$$\hat{x}' = \hat{y}' \times \hat{z}' =$$

$$= \hat{\rho} \times \hat{z} =$$

$$= (\cos\phi \, \hat{x} + \sin\phi \, \hat{y}) \times \hat{z} =$$

$$= -\cos\phi \, \hat{y} + \sin\phi \, \hat{x} = -\hat{\phi}$$

$\rightarrow$ Relação entre versores

$$\hat{x}' = \sin\phi \, \hat{x} - \cos\phi \, \hat{y}$$
$$\hat{y}' = \cos\phi \, \hat{x} + \sin\phi \, \hat{y}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \hat{x}' \\ \hat{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\phi & -\cos\phi \\ \cos\phi & \sin\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

Note que $\phi$ é ângulo entre $\hat{x}$ e $\hat{n} \equiv \hat{y}'$ e não entre $\hat{x}$ e $\hat{x}'$.

6

No referencial do anel campo do anel é campo de uma espira circular

$$\bar{B}'(\bar{O}') = \frac{\mu_0 I(t)}{2} \left. \frac{a^2}{[a^2 + y'^2]^{3/2}} \right|_{y'=0} \hat{y}' =$$

$$= \frac{\mu_0 I(t)}{2a} \hat{y}'$$

A direção do campo varia em referencial externo porque $\hat{y}'$ gira neste referencial

$$\bar{B}'(0) = \frac{\mu_0 I(t)}{2a} \left[ \cos(\omega t)\, \hat{x} + \sin(\omega t)\, \hat{y} \right]$$

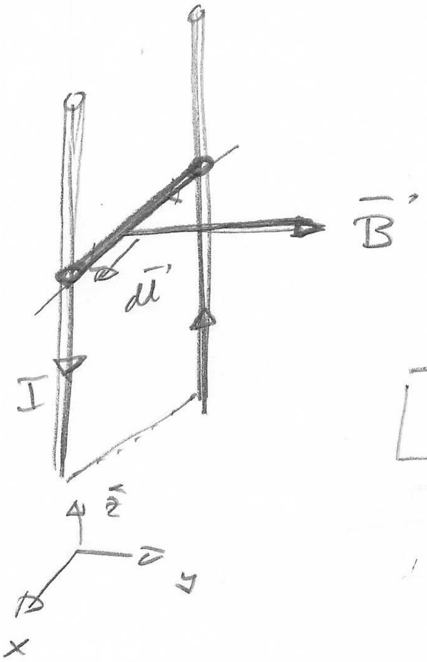
onde $\quad I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sin(\omega t)$

$$\bar{B}'(0) = \frac{\mu_0 \mathcal{E}_0}{2aR} \sin(\omega t) \left[ \cos(\omega t)\, \hat{x} + \sin(\omega t)\, \hat{y} \right]$$

$$|\bar{B}'(0)|^2 = \left( \frac{\mu_0}{2a} \right)^2 \frac{\mathcal{E}_0^2}{R^2} \sin^2(\omega t)$$

$$\boxed{|B(0)| = \frac{\mu_0}{2a} \frac{\mathcal{E}_0}{R} |\sin(\omega t)|}$$

## Questão 2




$$\vec{F}_L = BI\ell\,\hat{x}\times\hat{y} = BIL\,\hat{z}$$

→ equação de Newton

$$\boxed{ma = mg - BI\ell}$$

→ Lei de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = +Bv\ell$$

$$RI = V + \mathcal{E} = V + Bv\ell \; / \; \frac{1}{B\ell}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{B\ell}\left[V + RI\right]}$$

1). $$\boxed{\frac{dv}{dt} = g + \frac{B\ell}{m} I}$$ $\mathcal{E}$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B\ell}{m}\,\frac{V + Bv\ell}{R}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B\ell}{m}\left[\frac{V}{R} + \frac{B\ell}{R}v\right].$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{(B\ell)^2}{mR}v = g - \frac{B\ell V}{mR}}$$

Equação diferencial para velocidade.

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \lambda v = \alpha}$$

$$v = v_H + v_N$$

$$v_N = \frac{\alpha}{\lambda} \quad , \quad v_H = A e^{-\lambda t}$$

$$v = \frac{\alpha}{\lambda} + A e^{-\lambda t}$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\lambda} + A = 0 \qquad \boxed{\alpha \neq 0}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]}$$

Para $\alpha = 0$ força gravitacional é igual a força de Lorentz devido a atuação da Bateria.

$$v \rightarrow \frac{\alpha}{\lambda} \rightarrow \text{sol. estacionária.}$$

$$v_{max} = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{mR}{(B\ell)^2}\left[g - \frac{B\ell V}{mR}\right]$$

$$\boxed{v_{max} = \frac{mgR}{(B\ell)^2}\left[1 - \frac{B\ell V}{mgR}\right]}$$

$$I(t) = \frac{V}{R} + \frac{B\ell}{R} v(t) =$$

$$= \frac{V}{R} + \frac{B\ell}{R} \overbrace{\frac{\alpha}{\lambda}}^{v_{max}} \left[1 - e^{-\lambda t}\right] =$$

$$= \frac{V}{R} + \frac{\cancel{B\ell}}{\cancel{R}} \frac{m\cancel{R}}{(B\ell)^2}\left[g - \frac{B\ell V}{mR}\right]\left[1 - e^{-\lambda t}\right] =$$

$$\boxed{I(t) = \frac{V}{R} + \left[\frac{mg}{B\ell} - \frac{V}{R}\right]\left[1 - e^{-\lambda t}\right]}$$

→ caso $V = 0$

$$v_{max} = \frac{mgR}{(B\ell)^2}$$

$$\boxed{\alpha = g \qquad \lambda = \frac{(BL)^2}{mR}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= \frac{mgR}{(B\ell)^2}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] \\ I(t) &= \frac{mg}{B\ell}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] \end{aligned}}$$

---

A posisão da barra em função de tempo

$$s(t) = \int_0^t dt'\, v(t') = \frac{mgR}{(B\ell)^2} \int_0^t dt' \left[1 - e^{-\lambda t}\right]$$

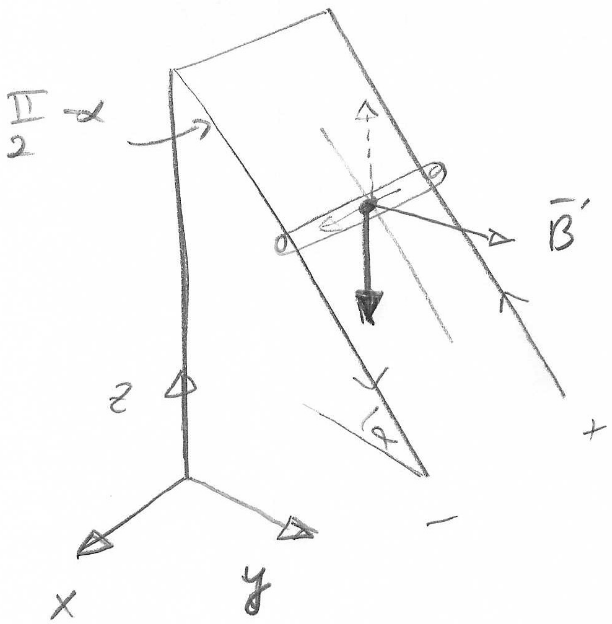
$$= \left[t' + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^t \cdot \frac{mgR}{(B\ell)^2} =$$

$$= \frac{mgR}{(B\ell)^2}\left[t + \frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda t} - 1\right)\right]$$

$$\boxed{s(t) = \frac{mgR}{B\ell}\left[t - \frac{1}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]\right]}$$

## Questão 3

Considere barra deslizante nas trilhos inclinados formando angulo $\alpha > \arctan\mu$ com solo, onde $\mu \to$ coeficient de atrito (cinemático).




$$\vec{B} = B\hat{y}$$

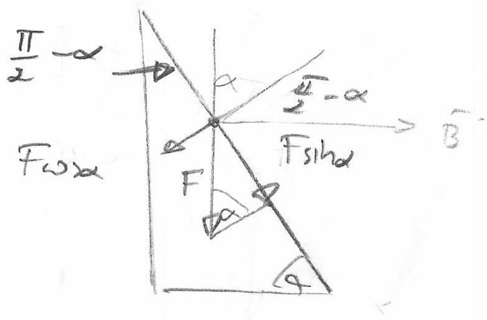
Forsa de lorentz

$$\bar{F}_L' = IBl\,\hat{x}\times\hat{y} =$$
$$= \underline{IBl\,\hat{z}}$$

$$\bar{F}_g' = -mg\,\hat{z}$$

### Forsa resultante

$$\bar{F}' = (IBl - mg)\,\hat{z}$$
$$= -\underbrace{[mg - IBl]}_{>0}\,\hat{z}$$




Atrito $\boxed{T = \mu F\cos\alpha}$

$$ma = F\sin\alpha - T = F(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\boxed{a = \frac{F}{m}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = + B v l \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$
$$= B v l \sin\alpha$$

$$R I = V + \mathcal{E} = V + B v l \sin\alpha$$

$$\boxed{I = \frac{V}{R} + \frac{B v l}{R} \sin\alpha}$$

$$a = \frac{mg}{m}\left(1 - \frac{Bl}{mg} I\right)\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) =$$

$$= g\left[1 - \frac{Bl}{mg}\underbrace{\left(\frac{V}{R} + \frac{Bl}{R} v \sin\alpha\right)}_{I}\right]\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

$$a = g - \frac{Bl}{m}\frac{V}{R}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$
$$- \frac{(Bl)^2}{mR} \sin\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) v$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \lambda v = \sigma}$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{(Bl)^2}{mR} \sin\alpha\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \\ \sigma = g - \frac{Bl}{mR}\frac{V}{R}\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right) \end{cases}$$

**Solução:**

$$v(t) = \frac{\alpha}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] \qquad v(0) = 0$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{g - \frac{Bl}{mR}\frac{V}{R}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\frac{(Bl)^2}{mR}\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

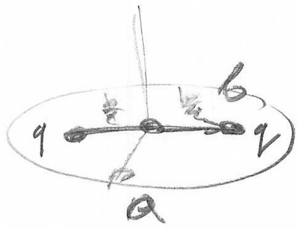
$$\boxed{\alpha \to \frac{\pi}{2}}$$

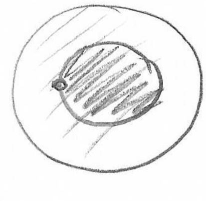
$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{g - \frac{BL}{mR}\frac{V}{R}}{\frac{(BL)^2}{mR}} = \frac{mR}{(BL)^2}\left[g - \frac{BL}{mg}\frac{V}{R}\right]$$

$t \to \infty$

$$\boxed{v \to v_{max} = \frac{\alpha}{\lambda}}$$

# Questão 4



→ CAMPO ELÉTRICO NO CIRCULO DE RAIO 'b'

$$\oint \vec{E}' \cdot d\vec{l}' = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$\vec{B} = \mu_0 n I(t)\,\hat{z}$$

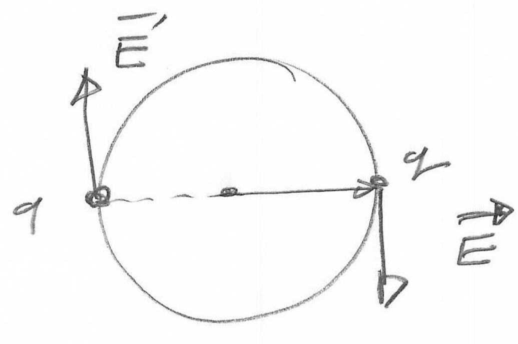
$$d\vec{l} = \hat{\phi}\, b\, d\phi \qquad d\vec{a} = \rho\, d\rho\, d\phi\ \hat{z}$$

$$\vec{E}' = E(t)\,\hat{\phi}$$

$$\int_0^{2\pi} E(t)\,\hat{\phi}\cdot\hat{\phi}\, b\, d\phi = -\frac{d}{dt}\int_S \mu_0 n I(t)\,\rho\, d\rho\, d\phi$$

$$2\cancel{\pi}\cancel{b}\, E(t) = -\frac{d}{dt}\left[\mu_0 n I(t)\, \cancel{\pi} b^2\right]$$

$$\boxed{E(t) = -\frac{\mu_0 n}{2}\frac{dI}{dt}}$$



Torque actuando sobre o sistema

$$\bar{\tau}' = 2b\hat{s} \times (q\bar{E}') = 2bqE(t)\underbrace{\hat{s}\times\hat{\phi}}_{\hat{z}}$$

$$= 2bq\left[-\frac{\mu_0 n}{\cancel{2}}\frac{dI}{dt}\right]\hat{z} =$$

$$\boxed{\bar{\tau}' = -\mu_0 n q b\frac{dI}{dt}\hat{z}}$$

→ Momento de Inercia

$$I_i = mb^2 + mb^2 = 2mb^2$$

$$\frac{dL}{dt} = \tau \Rightarrow I_i\frac{d\omega}{dt} = \mu_0 n q b\frac{dI}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\mu_0 n q b}{2mb^2}\frac{dI}{dt}$$

$$\omega(t) = \frac{\mu_0 n q}{2mb} I(t) + c$$

$$\omega(0) = 0 \Rightarrow c = -\frac{\mu_0 n q}{2mb} I(0)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega(t) &= \frac{\mu_0 n q}{2mb}\left[I(t) - I(0)\right] \\ \bar{\omega}' &= -\omega(t)\hat{z}\end{aligned}}$$

## Questão 5

$$\bar{E}' = \frac{\alpha(t)}{2}\left(-y\,\hat{x} + x\,\hat{y}\right) = E^1\hat{x} + E^2\hat{y}$$

Lei de Faraday (diferencial)

$$\bar{\nabla}' \times \bar{E}' = -\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t} \qquad x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z$$

$$(\nabla \times E')^1 = \frac{\partial E^3}{\partial x^2} - \frac{\partial E^2}{\partial x^3} = 0 - 0 = 0$$

$$(\nabla \times \bar{E}')^2 = \frac{\partial E^1}{\partial x^3} - \frac{\partial E^3}{\partial x^1} = 0 - 0 = 0$$

$$(\nabla \times \bar{E}')^3 = \frac{\partial E^2}{\partial x^1} - \frac{\partial E^1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\alpha}{2}x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\alpha}{2}y\right)$$

$$= \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha(t)$$

$$\frac{\partial \bar{B}'}{\partial t} = -\bar{\nabla}' \times \bar{E}' = -\alpha(t)\,\hat{z}$$

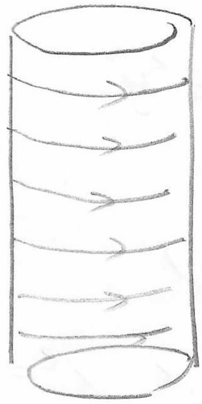
Integrando esta equação temos

$$\bar{B}' = \left[-\int_0^t dt'\,\alpha(t') + \text{const}\right]\hat{z}$$

$$\bar{B}'(t=0) = \text{const}\,\hat{z} = B_0\,\hat{z} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\bar{B}' = \left[-\int_0^t dt'\,\alpha(t') + B_0\right]\hat{z}}$$

## Questão 6



$$\boxed{\begin{array}{ll} \vec{B} = \mu_0 n I(t)\, \hat{z} & \rho < a \\ \vec{B} = 0 & \rho > a \end{array}}$$

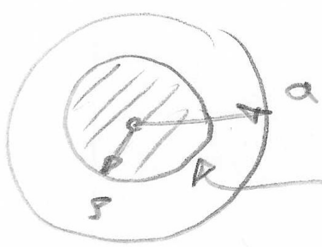
$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

Precisamos determinar campo elétrico associado com $\vec{B}$

→ Ansatz $\quad \vec{E} = E(t, \rho)\, \hat{\phi}$

→ Lei de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \Phi_B = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{a}$$




$d\vec{a} = \hat{z}\, \rho\, d\rho\, d\phi$

$d\vec{l} = \hat{\phi}\, \rho\, d\phi$

$C = \partial S$ (borda do disco)

$$\oint_C E(t, \phi)\, \hat{\phi} \cdot \hat{\phi}\, \rho\, d\phi = -\frac{d}{dt} \int_S da\, B(t)$$

$B(t) = \mu_0 n I(t) \qquad \rho < a$

$B(t) = 0 \qquad \rho > a$

$\rho < a$

$$2\pi\rho\, E(t,\rho) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n I(t)\, \pi \rho^2\right)$$

$$= -\mu_0 n \pi \rho^2 \frac{dI}{dt}$$

$$\boxed{E(t,\rho) = -\frac{\mu_0}{2} n \frac{dI}{dt} \rho \equiv C_1 \rho}$$

$\rho > a$

$$2\pi\rho\, E(t,\rho) = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0 n I(t)\, \pi a^2\right)$$

$$\boxed{E(t,\rho) = -\frac{\mu_0}{2} n \frac{dI}{dt} \frac{a^2}{\rho} \equiv C_2 \frac{1}{\rho}}$$

$$\bar{E}' = \begin{cases} C_1 \rho\, \hat{\phi} & \rho < a \\ C_2 \frac{1}{\rho} \hat{\phi} & \rho > a \end{cases}$$

$$\hat{\phi} = -\sin\phi\, \hat{x} + \cos\phi\, \hat{y} = \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\bar{E}' = \begin{cases} C_1 (-y\hat{x} + x\hat{y}) & \rho < a \\ \frac{-y\hat{x} + x\hat{y}}{x^2+y^2} & \rho > a \end{cases}$$

18

$\rho < a$

$$\bar{\nabla}' \cdot \bar{E}' = C_1 \left[ \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) \right] = 0$$

$\rho > a$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = C_2 \left[ \frac{\partial}{\partial x}\left( \frac{-y}{x^2+y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( \frac{x}{x^2+y^2} \right) \right] =$$

$$= C_2 \left[ + \frac{y}{(x^2+y^2)^2} 2x - \frac{x}{(x^2+y^2)^2} 2y \right] =$$

$$= \frac{2C_2}{(x^2+y^2)^2}(yx - xy) = 0$$

$\rho = \varepsilon_0 \bar{\nabla}' \cdot \bar{E}' = 0$ em dois regiões.